XL Sympozjon
"Modelowanie w mechanice"

Niezawodność konstrukcji
z rozmytymi parametrami

Andrzej Pownuk
Politechnika Śląska
Wydział Budownictwa
Zakład Mechaniki Teoretycznej

Niezawodność konstrukcji z losowymi parametrami

$$R = P(\{\omega : \mathrm{g}(\mathbf{h}(\omega)) \geq 0\})$$

gdzie

$$g : \mathrm{R}^m \ni \mathbf{h} \rightarrow g(\mathbf{h}) \in R$$

funkcja graniczna

$$\mathbf{h} : \Omega \ni \omega \rightarrow \mathbf{h}(\omega) \in R^m$$

zmienna losowa

Prawdopodobieństwo zniszczenia konstrukcji

$$P_f = 1 - R = P(\{\omega : \mathrm{g}(\mathbf{h}(\omega)) < 0\})$$

Funkcja graniczna problemu rozciągania-ściskania

$$g(\sigma, P) = \sigma - \frac{P}{A}$$

Niepewności parametrów

Niepewne wartości siły

$$P \in [P^{-}, P^{+}]$$

Niepewne kierunki działania siły

$$P_x = P \cos \alpha, \quad \text{dla} \quad \alpha \in [\alpha^{-}, \alpha^{+}]$$

Niepewności punktu przyłożenia

$$x \in [x], \, y \in [y], \, z \in [z]$$

Niepewne wartości stałych

$$E \in [E], \nu \in [\nu]$$

itp.

Przykładowe problemy inżynierskie

Biomechanika

stałe materiałowe

Budownictwo

stałe materiałowe
w konstrukcjach murowych

stałe materiałowe
w konstrukcjach kompozytowych

itp.

Metody modelowania niepewności

metody półprobabilistyczne
(współczynniki bezpieczeństwa)

metody probabilistyczne
(stochastyczna metoda elementów skończonych,
FORM, SORM itp.)

prawdopodobieństwo subiektywne
(wykorzystanie wzoru Bayse'a)

zbiory rozmyte

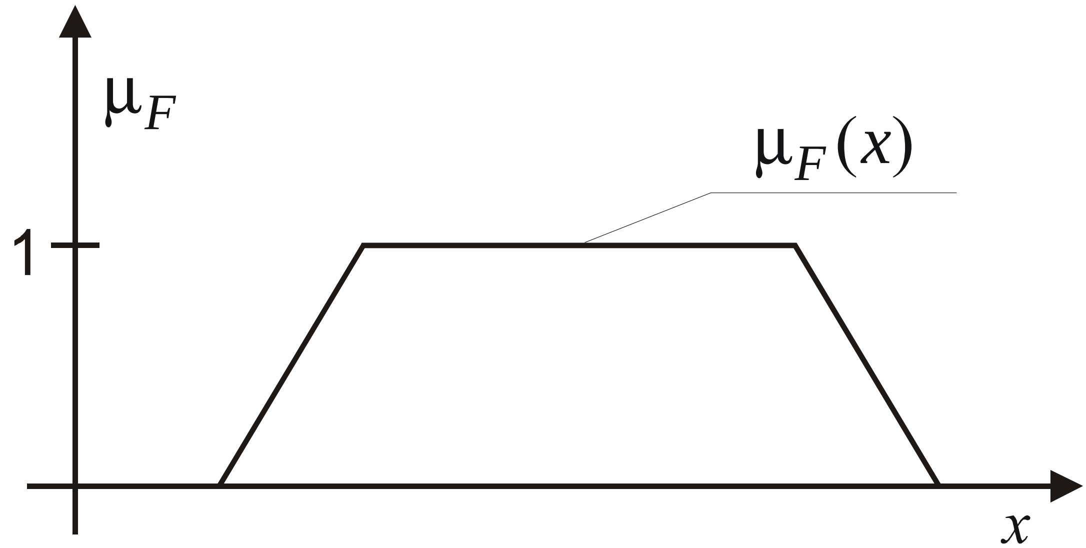
zbiory przybliżone

prawdopodobieństwo przedziałowe
itp.

Definicja zbioru rozmytego

Zbiorem rozmytym F w przestrzeni X nazywamy dowolne odwzorowanie

$$\mu_F : X \ni x \to \mu_F(x) \in [0,1] \subseteq R$$



Różne interpretacje funkcji przynależności zbioru rozmytego

- interpretacja probabilistyczna

- interpretacja oparta na teorii zbiorów losowych

Probabilistyczna interpretacja funkcji przynależności zbioru rozmytego

Niech dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Gamma, \Sigma_\Gamma, P_\Gamma)$.
Na przestrzeni $(\Gamma, \Sigma_\Gamma, P_\Gamma)$ określona jest zmienna losowa $X_\Gamma : \Gamma \ni \gamma \to X_\Gamma(\gamma) \in R$.
W zbiorze Γ określamy podzbiór F.
Zbiór F jest określony na drodze doświadczalnej.

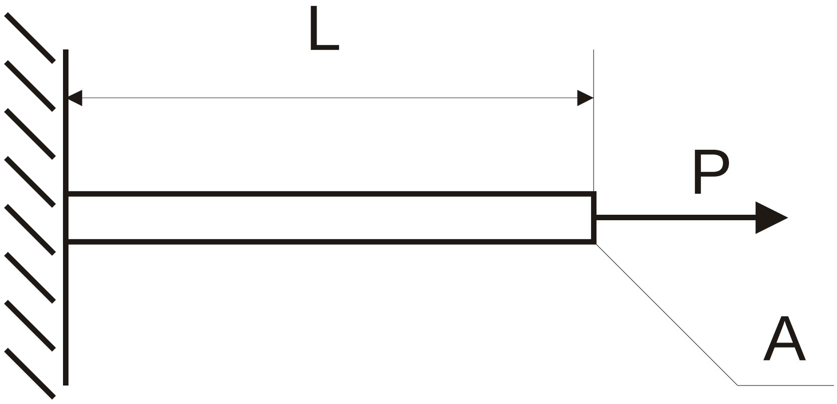
Funkcję przynależności można określić następująco:

$$\mu_F(x) = P_\Gamma(\{\gamma : \gamma \in F \mid X_\Gamma(\gamma) = x\})$$

czyli

$$\mu_F(x) = \frac{P_\Gamma(\{\gamma : \gamma \in F, X_\Gamma(\gamma) = x\})}{P_\Gamma(\{\gamma : X_\Gamma(\gamma) = x\})}$$

Przykład



P [kN]	12	15	18	21	24
Ekspert 5					
Ekspert 4					
Ekspert 3					
Ekspert 2					
Ekspert 1					
$\mu_F(P)$	0.4	1	0.4	0.4	0.2

- pozytywna odpowiedź eksperta

$$\Theta_X(12[kN]) = \{\delta_1, \delta_2\}$$

$$\Theta_X(15[kN]) = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5\}$$

$$\Theta_X(24[kN]) = \{\delta_1\}$$

Przestrzeń Δ

Niech dana jest przestrzeń probabilistyczna

$$(\Delta, \Sigma_\Delta, P_\Delta)$$

Założymy, że zbiór Δ jest liniowo uporządkowany przy pomocy relacji $<$.

$$\delta_1 < \delta_2 < \ldots \quad \text{dla } \delta_i \in \Delta$$

Zdefiniujemy teraz zbiór

$$\Theta_X(x) = \{\delta \in \Delta : \delta < \delta_{N(x)+1}, P_\Delta(\Theta_X(x)) = \mu_F(x)\}$$

Z definicji zbioru $\Theta_X(x)$ wynika, że:

$$\mu_F(x) = P_\Delta\{\Theta_X(x)\}$$

$$\Theta_X(x) = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{N(x)}\}$$

Prawdopodobieństwo zniszczenia konstrukcji o parametrach rozmytych

$$P_f = P_\Delta(\{\delta : \delta \in \Theta(\gamma), \gamma \in F, g\big(\mathbf{h}_\Gamma(\gamma)\big) < 0\})$$

$$P_f = P_\Delta\left(\bigcup_{\mathbf{h}:\, g(\mathbf{h})<0} \Theta_{\mathbf{h}}(\mathbf{h}) \right) == \sup_{\mathbf{h}:\, g(\mathbf{h})<0} \mu_F(\mathbf{h})$$

P [kN]	12	15	18	21	24
Ekspert 5					
Ekspert 4					
Ekspert 3					
Ekspert 2					
Ekspert 1					
$\mu_F(P)$	0.4	1	0.4	0.4	0.2
$g(P)$	55	25	-5	-35	-65

$$g = \sigma_0 - \frac{P}{A}$$

$$P_f = \sup_{P:\, g(P)<0} \mu_F(P) = max\{0.4,0.4,0.2\} = 0.4$$

Prawdopodobieństwo zniszczenia konstrukcji o parametrach losowych i rozmytych

$$P_f = P_{\Omega\times\Delta}(\{(\omega,\delta):\delta\in\Theta_{\mathbf{h}}(\mathbf{h}), g(\mathbf{X}_\Omega(\omega),\mathbf{h})<0, \omega\in\Omega, \mathbf{h}\in R^{n_F}\})$$

$$P_f = \sum_{\mathbf{x}:\ \mathbf{x}=\mathbf{X}(\omega),\ \omega:\ \omega\in\Omega} P_\Omega(\{\mathbf{x}\})\cdot \sup_{\mathbf{h}:\ g(\mathbf{x},\mathbf{h})<0} \mu_F(\mathbf{h})$$

$$P_f = E_\Omega\left(\sup_{\mathbf{h}:\ g(\mathbf{x},\mathbf{h})<0} \mu_F(\mathbf{h}) \right)$$

$$\mu_{g(F)}(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{h}:\ g(\mathbf{x},\mathbf{h})<0} \mu_F(\mathbf{h})$$

$$P_f = E_\Omega(\mu_{g(F)}(\mathbf{x})) = \sum_{\mathbf{x}} \mu_{g(F)}(\mathbf{x}) P_\Omega(\{\mathbf{x}\})$$

$$P_f = \int_{R^{n_r}} \mu_{g(F)}(\mathbf{x})\, dP_\Omega(\mathbf{x})$$

Prawdopodobieństwo zniszczenia konstrukcji o parametrach losowych i zbiorowych (przedziałowych)

$$\mu_{g(F)}(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{h}:\, g(\mathbf{x},\mathbf{h})<0} \mu_F(\mathbf{h}) = \begin{cases} 1 \text{ gdy} \{\mathbf{h} : g(\mathbf{x},\mathbf{h}) < 0, \mathbf{h} \in A\} \neq \varnothing \\ 0 \text{ gdy} \{\mathbf{h} : g(\mathbf{x},\mathbf{h}) < 0, \mathbf{h} \in A\} = \varnothing \end{cases}$$

$$\{\mathbf{x} : \mu_{g(F)}(\mathbf{x}) = 1\} = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x},\mathbf{h}) > 0, \mathbf{h} \in A\}$$

$$P_f = \sum_{\mathbf{x}} \mu_{g(F)}(\mathbf{x}) P_\Omega(\{\mathbf{x}\}) = \sum_{\mathbf{x}:\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}: g(\mathbf{x},\mathbf{h})>0, \mathbf{h}\in A\}} P_\Omega(\{\mathbf{x}\})$$

$$P_f = \int_{\{\mathbf{x}: g(\mathbf{x},\mathbf{h})>0, \mathbf{h}\in A\}} dP_\Omega(\mathbf{x})$$

Funkcja graniczna zależy od wektora parametrów losowych o wartościach należących do zbioru rozmytego

$$P_f = P_{\Omega\times\Delta}(\{(\omega,\delta) : \delta\in\Theta_X(\gamma), \gamma\in F, g(\mathbf{X}_\Gamma(\gamma))<0, g(\mathbf{X}_\Omega(\omega))<0\})$$

$$P_f = \sum_{\mathbf{x}:\, g(\mathbf{x})<0} P_\Omega(\{\mathbf{x}\}) \cdot \mu_F(\mathbf{x})$$

$$P_f = \int_{g(\mathbf{x})<0} \mu_F(\mathbf{x}) dP_\Omega(\mathbf{x})$$

P [kN]	12	15	18	21	24
Liczba pomiarów	15	15	10	5	5
Częstość względna	0.3	0.3	0.2	0.1	0.1
$\mu_F(P)$	0.4	1	0.4	0.4	0.2
$g(P)$ [MPa]	55	25	-5	-35	-65

$$P_f = \sum_{g(P)<0} P_\Omega(\{P\}) \cdot \mu_F(P) = 0.14$$

Interpretacja funkcji przynależności oparta na teorii zbiorów losowych

Niech dana jest zmienna losowa
o wartościach przedziałowych

$$\overline{\mathbf{h}}_\Gamma : \Gamma \in \gamma \to \overline{\mathbf{h}}_\Gamma(\gamma) \in I(R^{n_F})$$

$$P_f^+ = P_\Gamma(\{\gamma : g(\overline{\mathbf{h}}_\Gamma(\gamma)) \cap (-\infty, 0] \neq \varnothing\})$$

$$P_f = \sup_{\mathbf{h}:\, g(\mathbf{h})<0} \mu_F(\mathbf{h})$$

P [kN]	14.5	17.5	20.5	23.5	26.5
Ekspert 5		■			
Ekspert 4		■	■		
Ekspert 3		■	■	■	
Ekspert 2	■	■	■	■	
Ekspert 1	■	■	■	■	■
$\mu_F(P)$	0.4	1	0.8	0.6	0.2
g(P)	+	+	-	-	-

$$P_f = \sup_{\mathbf{h}:\, g(\mathbf{h})<0} \mu_F(\mathbf{h}) = 0.8$$

Wnioski

1) Nowe interpretacje funkcji przynależności zbioru rozmytego umożliwiają doświadczalną weryfikację twierdzeń dotyczących teorii zbiorów rozmytych
2) Wzory określające prawdopodobieństwo zniszczenia konstrukcji otrzymane na podstawie obydwu zaprezentowanych interpretacji są identyczne.
3) Zaprezentowana teoria umożliwia badanie związków zbiorów rozmytych z rachunkiem prawdopodobieństwa.